

La pastisseria, la guerra de les galàxies i les matemàtiques

Jordi Arnau i Ballestar

Catedràtic jubilat d'Ensenyament Secundari
en l'especialitat de matemàtiques
jarnau12@xtec.cat

Resum

Tot i que moltes vegades no ens n'adonem, estem envoltats de matemàtiques. En podem detectar en els estris mecànics i electrònics que utilitzem habitualment; en les formes geomètriques que tenen alguns productes d'alimentació que consumim; en els efectes especials de les pel·lícules; etc. En aquest article el nostre objectiu és mostrar les matemàtiques presents en dos objectes que ens són plenament familiars: el producte de pastisseria conegut com a berlina i la famosa Estrella de la Mort de la saga de pel·lícules de *La guerra de les galàxies*. Concretament, ens centrarem a calcular-ne els volums utilitzant coneixements matemàtics a l'abast dels alumnes de segon de batxillerat científic. Al final de cada apartat suggerim activitats complementàries que permeten interconnectar diverses parts de les matemàtiques i així poder tenir una visió global d'aquesta ciència i no veure-la només com un conjunt de tècniques individuals sense cap mena de relació.

Abstract

Even though we are often not aware of it, mathematics is all around us. It can be found in many mechanical and electronic devices that we use daily, in the geometrical shape of some food products, in cinematic special effects, and so on. In this paper, our aim is to show some of the mathematics that can be found in a couple of familiar items, namely the pastry product known as a doughnut, and the famous Death Star from the Star Wars saga. We will focus on calculating their volume using a mathematical foundations well known by post-compulsory secondary school students (scientific branch). At the end of each section, some complementary activities are suggested as a way of interconnecting elements of the mathematics to give an overall view of this science, rather than just presenting a collection of unrelated technical skills.

1. Introducció

La manca de temps i la necessitat d'abastar tot un temari fa que sovint es treballi només la part mecànica de les matemàtiques i que se'n deixi de banda l'aplicació pràctica, és a dir, la resolució de problemes de la vida real com una aplicació dels coneixements matemàtics adquirits, el que s'anomena modelització. Aquesta mancança fa que els alumnes perdin de vista l'estreta relació que les matemàtiques tenen amb la realitat que els envolta i dona lloc, moltes vegades, a la pregunta «i per a què serveixen les matemàtiques?».

Fer que els alumnes entenguin la seva utilitat i la puguin experimentar de primera mà, per exemple sent capaços d'utilitzar les matemàtiques per modelitzar situacions quotidianes, pot ajudar a fer que deixin de ser considerades una matèria àrida, difícil i sense sentit i que se'n comenci a veure la bellesa.

El currículum de matemàtiques de segon de batxillerat científic i tecnològic inclou el càlcul de primitives i les seves aplicacions en el càlcul d'àrees i volums de revolució al voltant de l'eix d'abscisses. Aquest article proposa dos exercicis que poden ser un petit exemple de modelització matemàtica en el context del càlcul de primitives i en diverses aplicacions, uns exercicis que poden ser una bona cloenda d'aquest tema ja que s'utilitzen tots i cada un dels continguts desenvolupats.

2. Modelitzant el dònut

Una de les figures més conegudes dins de la geometria és el tor, una superfície de revolució generada per un cercle que gira al voltant d'un eix que li és coplanari.

En l'àmbit de la pastisseria tenim el seu equivalent en la berlina, el pastisset anomenat popularment dònut.

Quin és el volum d'un dònut?

Respondrem a aquesta pregunta calculant realment quin és el volum d'un tor i aplicant la fórmula obtinguda al cas del dònut.

Els tres elements que cal tenir en compte són:

1. L'eix de rotació, que com hem dit ha de ser un eix coplanari amb el cercle que gira al seu voltant per generar el tor.
2. El radi r de la circumferència central, que correspon al forat del mig (figura 1).
3. El radi R de la circumferència que gira al voltant de l'eix de rotació que és coplanari amb ella (figura 2).

Escollim com a eix de rotació l'eix OX i com a centre de la circumferència de radi R el punt que té per coordenades $(0, R + r)$. D'aquesta manera podem calcular el volum del tor si fem girar al voltant de l'eix OX la circumferència de radi R , centrada en el punt $C = (0, R + r)$ i a l'interval $[-R, R]$.¹

1. Es poden escollir altres sistemes de referència. Deixem al lector la possibilitat d'explorar altres opcions.



Figura 1

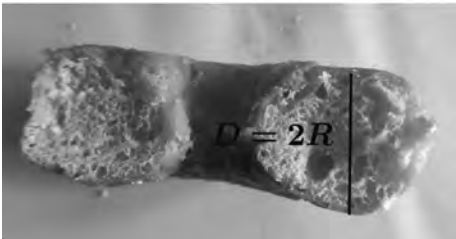


Figura 2

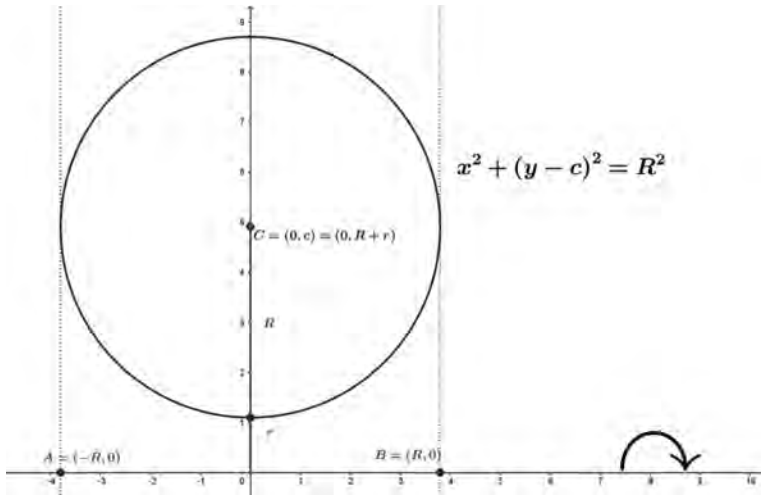


Figura 3

Si diem $c = R + r$, aquesta circumferència té per equació $x^2 + (y - c)^2 = R^2$.

Si aïllem la variable y de l'expressió anterior:

$$y = c \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

D'on obtenim les dues funcions que determinen els punts d'aquesta circumferència:

$$y = c + \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{per als punts de la meitat superior}$$

$$y = c - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{per als punts de la meitat inferior}$$

El volum buscat el podem calcular restant el volum de revolució generat per la part superior de la circumferència (figura 4) i el volum de revolució generat per la part inferior d'aquesta (figura 5), tots dos a l'interval $[-R, R]$.

Part superior:

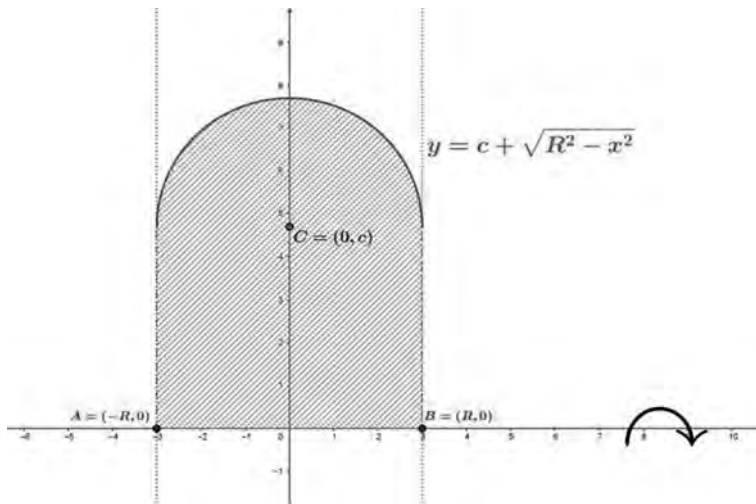


Figura 4

Part inferior:

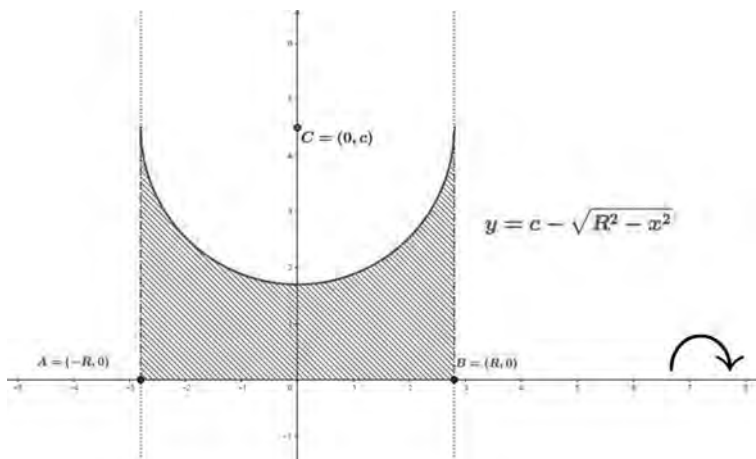


Figura 5

Si solapem gràficament les dues accions anteriors (figura 6) és clar que el resultat d'aquesta resta serà el volum de revolució generat per la circumferència de radi R i centre en el punt $(0, R + r)$ en girar al voltant de l'eix OX a l'interval $[-R, R]$.

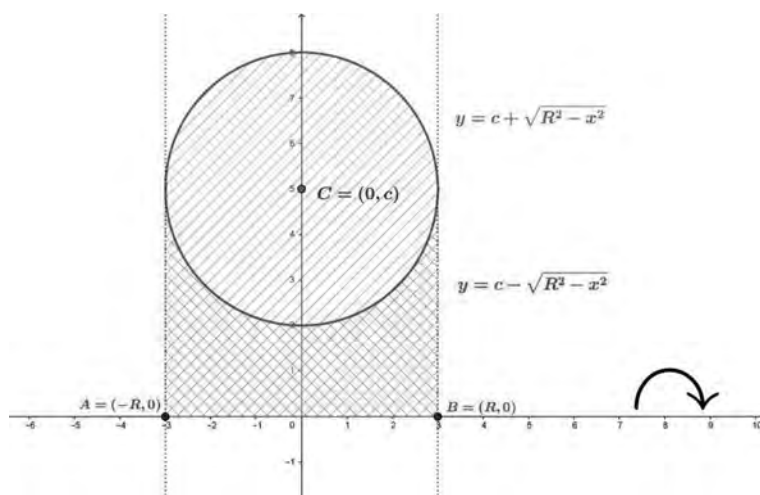


Figura 6

Així, la fórmula del volum buscat serà donada pel càlcul següent:

$$V = \pi \int_{-R}^R \left(c + \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx - \pi \int_{-R}^R \left(c - \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx$$

I si tenim en compte la simetria del problema, és equivalent a:

$$V = 2\pi \int_0^R \left(c + \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx - 2\pi \int_0^R \left(c - \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx$$

Agrupant les dues integrals en una tenim:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^R \left[\left(c + \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 - \left(c - \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 \right] dx = \\ &= 2\pi \int_0^R \left(c^2 + 2c\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - x^2 - c^2 + 2c\sqrt{R^2 - x^2} - R^2 + x^2 \right) dx = \\ &= 8\pi c \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Aquesta última integral la resoldrem fent el canvi trigonomètric:

$$\begin{cases} x = R \cdot \sin t \\ dx = R \cdot \cos t dt \end{cases}$$

Essent els nous extrems d'integració:

$$\begin{cases} x = R = R \cdot \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 = R \cdot \sin t \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

Amb la qual cosa:

$$V = 8\pi c \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 t \, dt = 8R^2 \pi c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 + \cos 2t}{2} \right] dt = 4\pi R^2 c \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 R^2 c$$

Així doncs, tenint en compte que $c = R + r$, el volum del dònut modelitzat pel tor és:

$$V = 2\pi^2 R^2 (R + r) \quad \text{unitats cúbiques}$$

3. Suggeriments i reflexions finals

Primer de tot, es pot preguntar als alumnes si un dònut és realment un tor, d'aquesta manera se'ls pots fer entendre la diferència que hi ha entre model matemàtic i realitat.

La principal dificultat que poden tenir els estudiants per resoldre aquest problema és com començar a plantejar-lo de manera que la seva resolució sigui al més senzilla possible, és a dir, com escollir uns eixos de coordenades on poder situar, de la millor manera possible, l'eix de rotació i la circumferència a partir de la qual, i per rotació al voltant d'aquest eix, es genera el tor.

Altres dificultats poden ser la resolució d'algunes de les integrals que es presenten en el procés del càlcul del volum, ja que pressuposen uns coneixements sobre canvis de variable i de resolució d'integrals trigonomètriques molt específics. Cal fer especial atenció a com el canvi de variable modifica els extrems d'integració.

Com a aplicació pràctica del model matemàtic desenvolupat, es poden repartir uns quants dònuts entre els estudiants per tal que prenguin les mesures necessàries (aconsellable mesurar els dos diàmetres per després obtenir els radis) per calcular el seu volum i, a partir d'aquestes dades, fer un petit estudi estadístic. Aquest estudi el podem organitzar en dues parts:

1. Comprovar si hi ha correlació lineal entre els dos radis R i r .
2. Dificilment hi haurà dos volums iguals (es pot reflexionar amb els alumnes per què passarà això) però és ben cert que, per raons de control de qualitat, el producte ha de tenir una forma i un volum semblant en totes les unitats i, en mitjana, aquest volum hauria de ser proper a un valor teòric que és la mitjana poblacional. Pot ser interessant calcular, a partir de la mostra, un interval de confiança per a aquesta mitjana poblacional. Com que es tracta de mesures, podem suposar que les dades provenen totes d'una població que segueix una llei Normal.

Recordem que un interval de confiança d'un paràmetre poblacional és un interval numèric construït a partir d'una mostra, el qual conté el valor real d'aquest paràmetre amb una probabilitat que anomenem nivell de confiança.

Per fer aquest estudi cal treballar amb productes que siguin del mateix tipus i de la mateixa marca comercial. Amb l'experiència de mesures fetes pels alumnes a l'aula, una possible mostra de les dades obtingudes és:

r	0,55	0,65	0,6	0,65	0,55	0,6	0,55	0,65	0,55	0,6
R	1,4	1,5	1,45	1,45	1,35	1,4	1,45	1,5	1,45	1,4
V	75,44	95,49	85,08	87,15	68,35	77,38	83,01	95,49	83,01	77,38

On els radis de les circumferències són expressats en centímetres i els volums en centímetres cúbics.

Amb aquestes dades s'obté:

$$\begin{cases} \bar{X}_V = 82,78 \\ s_V = 0,97 \end{cases}$$

amb un coeficient de correlació entre r i R de $\rho_{rR} = 0,6287$.

El núvol de punts, amb la recta de regressió corresponent, és:

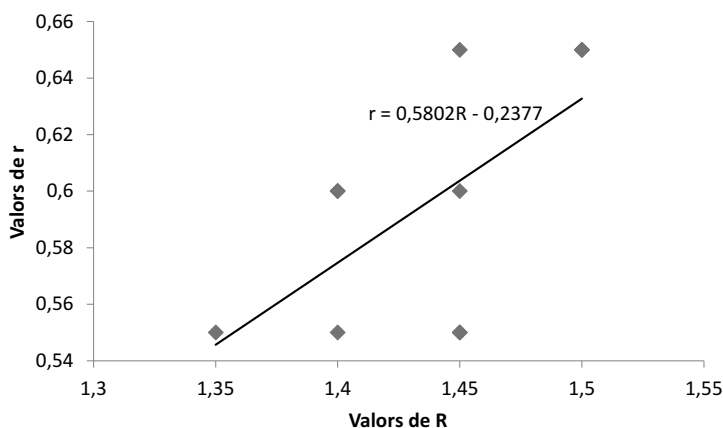


Figura 7

Es pot raonar amb els alumnes per què la correlació no és més alta mostrant les possibles fonts d'error: mesures preses amb poca precisió o cura, no deixen de ser productes industrials obtinguts a partir d'un motlle amb totes les imprecisions que això comporta; les circumferències no són circumferències perfectes...

Quant a l'interval de confiança per a la mitjana poblacional dels volums, el podem calcular amb un nivell de confiança del 95 %, és a dir, $1 - \alpha = 0,95$. Com que la mostra és petita (10 dades) haurem d'utilitzar la distribució t-Student amb $n - 1 = 9$ graus de llibertat:

$$IC_{1-\alpha} = \left[\bar{X}_V - t_\alpha \frac{s_V}{\sqrt{n}}, \bar{X}_V + t_\alpha \frac{s_V}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{amb} \quad t_\alpha = 2,2622$$

Si substituïm els diversos valors s'obté que l'interval de confiança per a la mitjana dels volums dels donuts, amb un nivell de confiança del 95 %, és:

$$IC_{0,95} = [82,086; 83,474]$$

Per acabar, i a partir d'aquests resultats, podríem estudiar quines haurien de ser les dimensions dels embolcalls d'aquests productes de pastisseria per tal de garantir que sempre els podrem empaquetar.

4. May the force be with you

Tots els fans de *La guerra de les galàxies* saben que l'Estrella de la mort és una arma de destrucció massiva, la destrucció de la qual és l'objectiu primordial de les forces rebels en alguns capítols de la saga.

La forma que té aquesta arma és la d'una esfera de la qual s'ha eliminat un petit casquet esfèric pertanyent a una altra esfera de radi molt més petit, formant així un orifici que és per on l'Estrella de la mort dispara el seu raig destructor (figura 8).



Figura 8

Quin és el volum de l'Estrella de la mort?

En aquest cas els elements que cal tenir en compte són:

1. El radi R de l'esfera gran.
2. El radi r de l'esfera petita de la qual es treu el casquet esfèric.
3. Que les dues esferes han de ser secants.

Per simplificar el problema, podem suposar que l'esfera de radi R es pot generar fent girar al voltant de l'eix OX una circumferència del mateix radi i centrada a l'origen de coordenades $O = (0, 0)$, i que l'esfera de radi r es pot generar fent girar al voltant de l'eix OX una circumferència del mateix radi i centrada en el punt $C = (a, 0)$ on a és la distància entre els centres de les dues circumferències.

El valor del paràmetre a no pot ser qualsevol, ja que com que les dues esferes han de ser secants s'ha de complir:

$$R - r < a < R + r, \quad \text{amb} \quad r < R$$

Les equacions de les respectives circumferències són:

$$C_1 : x^2 + y^2 = R^2$$

$$C_2 : (x - a)^2 + y^2 = r^2$$

Gràficament:

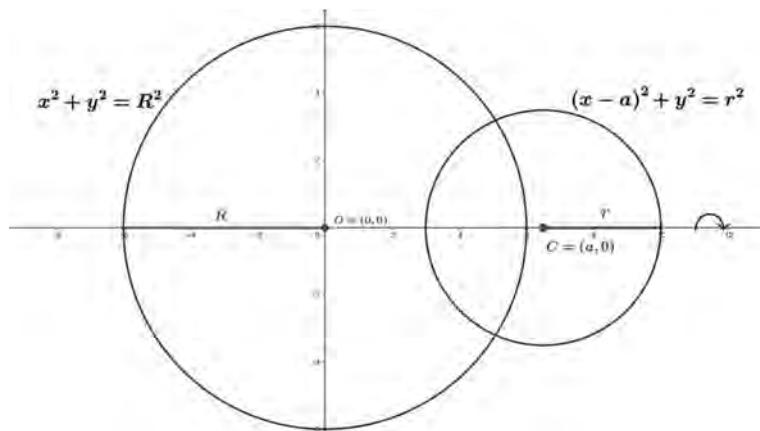


Figura 9

El volum V que estem buscant s'obté si restem del volum V_1 , corresponent a l'esfera de radi R , el volum V_2 generat en girar la intersecció de les dues circumferències al voltant de l'eix OX .

La primera part d'aquesta intersecció és determinada per un arc de la circumferència $C_2 : (x - a)^2 + y^2 = r^2$ i la segona part per un arc de la circumferència $C_1 : x^2 + y^2 = R^2$.

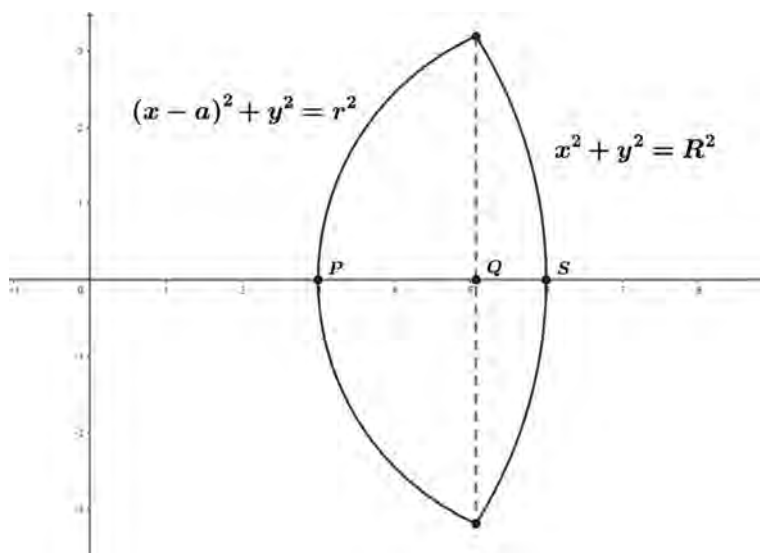


Figura 10

Per tant caldrà calcular el volum V_2 en dues parts, la primera essent el volum obtingut per la rotació de la part positiva del primer arc entre les abscisses dels punts P i Q , i la segona el volum obtingut per la rotació de la part positiva del segon arc entre les abscisses dels punts Q i S . Aquestes parts positives són, respectivament, les funcions:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= +\sqrt{r^2 - (x - a)^2} \\ f_2(x) &= +\sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}$$

Necessitem calcular les abscisses dels tres punts P , Q i S .

L'abscissa del punt $P = C_2 \cap \overline{OX}$

$$\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = r^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = a \pm r$$

L'abscissa corresponent al punt P és $x_P = a - r$.

L'abscissa del punt $Q = C_1 \cap C_2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - a)^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow x_Q = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}$$

L'abscissa del punt $S = C_1 \cap \overline{OX}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm R$$

L'abscissa del punt S és $x_S = R$.

Així doncs el volum de l'Estrella de la mort serà:

$$V = V_1 - V_2$$

$$\text{Amb } V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ i } V_2 = \pi \int_{x_P}^{x_Q} (f_1(x))^2 dx + \pi \int_{x_Q}^{x_S} (f_2(x))^2 dx = \pi (I_1 + I_2).$$

Per facilitar els càlculs anomenem $K = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}$; amb la qual cosa, si desenvolupem l'expressió anterior, obtenim:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a-r}^{\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}} (r^2 - (x - a)^2) dx = \int_{a-r}^K (-x^2 + 2ax + r^2 - a^2) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + ax^2 + (r^2 - a^2)x \right]_{a-r}^K = -\frac{K^3}{3} + aK^2 + (r^2 - a^2)K + \frac{(a-r)^3}{3} + r(a-r)^2 \\ I_2 &= \int_{\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}}^R (R^2 - x^2) dx = \int_K^R (R^2 - x^2) dx = \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_K^R = \frac{2R^3}{3} - R^2K + \frac{K^3}{3} \end{aligned}$$

Per tant:

$$I_1 + I_2 = aK^2 - (R^2 - r^2 + a^2)K + \frac{2R^3}{3} + \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3}$$

Recordem que $K = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}$

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= a \left(\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a} \right)^2 - (R^2 - r^2 + a^2) \left(\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a} \right) + \frac{2R^3}{3} + \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3} = \\ &= \frac{2R^3}{3} + \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3} - \frac{(R^2 - r^2 + a^2)^2}{4a} \end{aligned}$$

Així doncs:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi \left[\frac{2R^3}{3} + \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3} - \frac{(R^2 - r^2 + a^2)^2}{4a} \right]$$

És a dir, el volum de l'Estrella de la mort serà:

$$V = \pi \left[\frac{2R^3}{3} - \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3} + \frac{(R^2 - r^2 + a^2)^2}{4a} \right] \quad \text{unitats de volum}$$

5. Suggestiments i reflexions finals

Com en el problema del dònut, la primera de les dificultats amb què es trobaran els alumnes en intentar resoldre aquest problema és el seu plantejament inicial, és a dir, com posicionar les dues circumferències en uns eixos de coordenades de manera que els paràmetres R , r , a siguin fàcilment controlables.

La dificultat principal, però, la poden trobar en la quantitat i la complexitat dels càlculs (llargs i feixucs) un cop les integrals ja s'han resolt. Per acabar el problema no n'hi ha prou amb aplicar Barrow, cal una mica de càlcul algebraic per trobar la fórmula simplificada del volum. Si es considera que és una tasca complicada per als estudiants, se'ls pot donar la resposta final i deixar el desenvolupament dels càlculs com una activitat fora de l'aula; o bé es pot plantejar que obtinguin la solució amb diferents tipus de programari, generant així *outputs* diferents que permeten realitzar igualment un treball de manipulació algebraica per arribar a la conclusió que totes les expressions són equivalents.

Per utilitzar aquest model es pot demanar als alumnes que proposin diversos valors per als paràmetres R , r i a amb $R - r < a < R + r$, observin quin aspecte té l'Estrella de la mort amb aquests valors i en calculin el volum corresponent. També es pot observar quin tipus d'Estrella de la mort s'obté si el valor de a és de valors propers als extrems $R - r$ i $R + r$.

Concretament, si $a = R + r$ o bé $a = R - r$ podem comprovar que no hi hauria Estrella de la mort: les dues circumferències serien tangents exteriors en el primer cas (figura 11) i tangents interiors en el segon (figura 12).

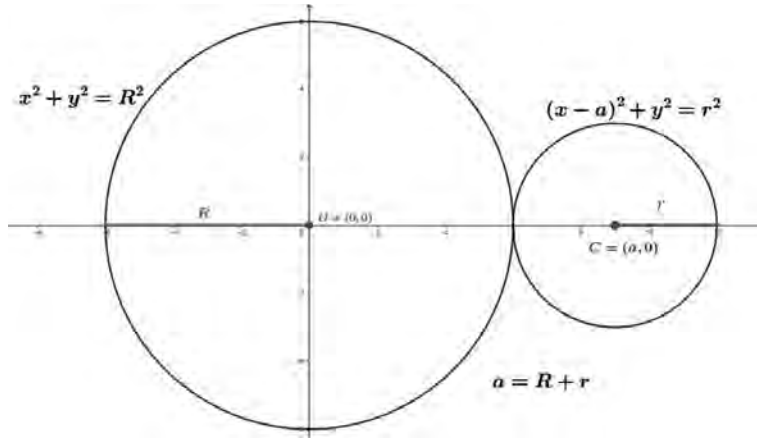


Figura 11

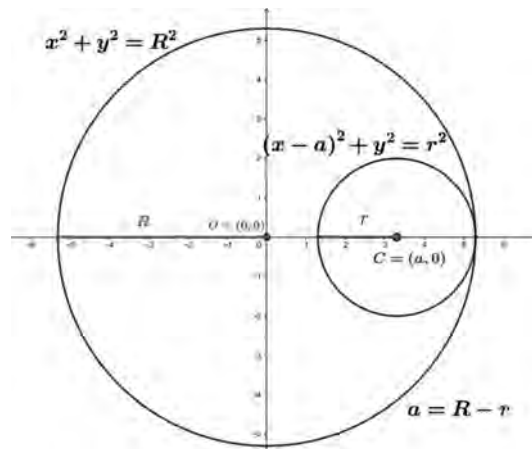


Figura 12

Com a aplicació complementària, pot ser molt interessant fer una petita immersió en la geometria relacionant els diversos valors que poden adoptar els paràmetres R , r i a amb la posició relativa de dues circumferències.

Ja hem vist què passa en els casos $R - r < a < R + r$: les circumferències són secants; $a = R - r$: les circumferències són tangents interiors; i $a = R + r$: les circumferències són tangents exteriors.

Falta saber quan les circumferències són interiors (figura 13), quan les circumferències són exteriors (figura 14) i quan les circumferències són concèntriques (figura 15). En concret, cal estudiar les situacions següents:

$$a < R - r, \quad a > R + r \quad \text{i} \quad a = 0$$

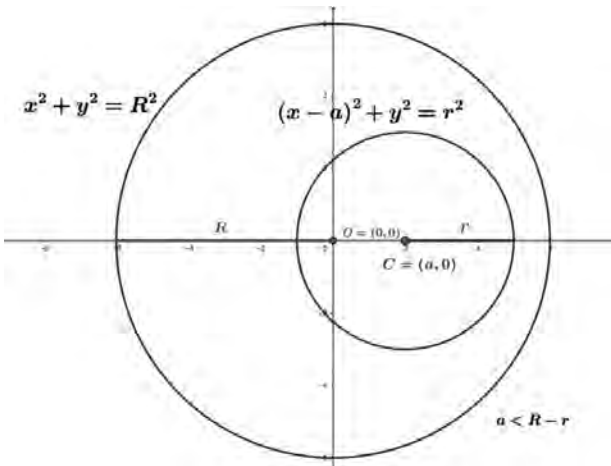


Figura 13

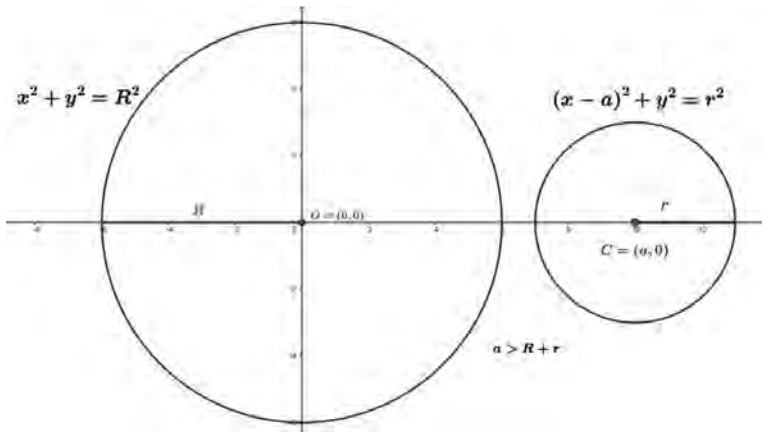


Figura 14

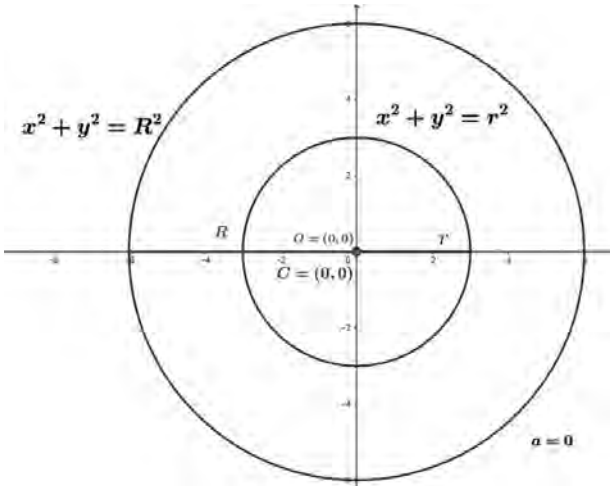


Figura 15

És possible visualitzar totes les possibles posicions relatives de dues circumferències utilitzant, per exemple, el programa GeoGebra.

Les activitats plantejades en l'article permeten mostrar les matemàtiques com un tot i no com un conjunt de parts sense cap mena de relació entre elles, com normalment les entenen els estudiants. És molt enriquidor veure que en el procés d'anàlisi d'un problema, i la seva resolució posterior, apareixen diferents àrees de les matemàtiques interconnectades, que en aquest cas concret són: anàlisi, àlgebra i geometria; totes imprescindibles de principi a final del problema estudiat.

.....